(4) Sei $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{ z \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \mid \forall u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) : zu = uz \}$.

Dann ist jedes M lokal $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$-finit, d.h.

$\forall v \in M$: $\dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) v < \infty$.

(5) Jedes $M \in \mathcal{O}$ ist als $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$-Modul endlich erzeugt.

Beweis: (1) Sei $F^k \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := \langle v_1 \cdots v_k \mid v_j \in \mathfrak{g} \rangle_{\mathbb{C}}$.

Dann $[F^k \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), F^\ell \mathfrak{U}(\mathfrak{g})] \subseteq F^{k+\ell-1} \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, also

ist $gr\, \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} F^k \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) / F^{k-1} \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

kommutative Algebra mit Basis

$y^r h^s x^t \mod F^{|r|+|s|+|t|} \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

$\Rightarrow$ $S(\mathfrak{g}) \cong gr\, \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ endl. erz. komm. Algebra

$\Rightarrow$ $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ Noethersch $\Rightarrow$ jeder endl. erz. Modul ist Noethersch.

(2) (O2), (O3) sind unter Untermoduln, Quotienten und endl. $\oplus$ stabil.

(O1) ist stabil unter Quotienten & endl. $\oplus$.

(O1) folgt für Untermoduln wegen (1).

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$Mod ist Abelsch und $\mathcal{O}$ ist stabil unter endl. ~~...~~ $\oplus$, ker, coker $\Rightarrow$ Beh.

(4) $L \otimes M$ erfüllt (O2), (O3).

Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von M und

$N \leq L \otimes M$ der von $v \otimes v_i$, $v \in L$, $i = 1, \ldots, n$,

erzeugte Untermodul. Dann für ~~...~~ $x \in \mathfrak{g}$:

$$v \otimes x v_i = x(v \otimes v_i) - (xv) \otimes v_i \in N$$

Per Induktion ~~...~~

$$L \otimes M = \sum_i L \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) v_i = \sum_{i,k} L \otimes F^k \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) v_i \leq N .$$

(5) $[\mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}] = 0$. Sei $v \in M \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} v_{\lambda_i}$

mit $v_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i}$. Dann

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) v \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) v_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} M_{\lambda_i}$$

endl.-dim. ~~...~~

(6) Beweis wie Lemma 1.2. $\square$.

Übung 1.4 (1) Sei $M \in \mathcal{O}$ und setze für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$:

$$[\lambda] := \lambda + \Lambda_r \quad .$$

Zeige: (a) $M^{[\lambda]} = \bigoplus_{\mu \in [\lambda]} M_\mu$ ist ein $\mathfrak{g}$-Untermodul.

(b) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \quad M = \bigoplus_{i=1}^{n} M^{[\lambda_i]}$

(2) Sei $M \in \mathcal{O}$ unzerlegbar (d.h. $M = M' \oplus M''$, M', M'' $\mathfrak{g}$-Untermoduln $\Rightarrow$ $M' = 0, M'' = M$ oder $M' = M, M'' = 0$.)

Zeige: $\forall \lambda, \mu \in \Pi(M)$: $\lambda \equiv \mu \pmod{\Lambda_r}$.

Lösung: (1)(a) Sei $v \in M_\mu$. Dann $\exists$ surjektive $\mathfrak{h}$-lineare Abb. $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}_\mu \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$, wobei $\mathbb{C}_\mu = \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{h}$-Wirkung durch μ.

Folglich ist

$$\Pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})v) \subseteq \Pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}_\mu)$$
$$\subseteq \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \Pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))\}$$

Aber nach dem PBW-Satz ist

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\nu \in \Lambda_r} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_\nu, \text{ also } \Pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \subseteq \Lambda_r.$$

(Die Umkehrung gilt auch.) Somit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v \subseteq M^{[\mu]}$.

(b) Es gilt als $\mathfrak{h}$-Moduln

$$M = \bigoplus_{\mu \in} M_\mu$$

Nach ~~Theorem~~ Lemma 1.2 (3) gibt es endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_n + \Pi(M)$ mit $\Pi(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^n [\lambda_i]$.

Es folgt $M = \bigoplus_{i=1}^n M^{[\lambda_i]}$ als $\mathfrak{h}$-Moduln,

aber die Teile der Zerlegung sind $\mathfrak{g}$-invariant $\Rightarrow$ Beh.

(2) Nach (1) $\exists \lambda : M = M^{[\lambda]}$, somit

$\Pi(M) \subseteq [\lambda] = \lambda + \Lambda_r \Rightarrow$ Beh. $\square$.

<u>Def.</u> 1.5 Sei M ein $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul.

(1) $v \in M \setminus \{0\}$ heißt <u>maximaler Vektor</u>

falls (a) $\mathfrak{n}^+ v = 0$
(b) $\exists \lambda: \ v \in M_\lambda$ $\Big\}$ $(\Leftrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{b}) v \subseteq \mathbb{C} \cdot v.)$

λ heißt das Gewicht von v.

<u>Bem.</u>: $M \in \mathcal{O} \Rightarrow \exists v \in M \setminus \{0\}$: v maximal.

(2) M ist ein <u>Höchstgewichtsmodul</u> (zum Gewicht λ)

falls $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v$ für einen maximalen Vektor v.
$(\in M_\lambda)$

<u>Bem.</u> Dann ist $M = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) v$.

(3) $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$: $\lambda \leq \mu :\Leftrightarrow \mu - \lambda \in \langle \Phi^+ \rangle_{\mathbb{N}}$.

<u>Theorem 1.4</u> Sei $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v$ für einen ~~Höchstgewichtsvektor~~ maximalen Vektor $v \in M_\lambda$.

(1) $$M = \langle y_1^{i_1} \cdots y_m^{i_m} v \mid i_1, \dots, i_m = 0, 1, \dots \rangle_{\mathbb{C}}$$

Insbesondere ist M halb-einfach über $\mathfrak{h}$.

(2) $\forall \mu \in \Pi(M)$: $\mu \in \lambda - \langle \Phi^+ \rangle_{\mathbb{N}}$, insbesondere $\mu \leq \lambda$

(3) $\forall \mu \in \Pi(M)$: $\dim M_\mu < \infty$ und $\dim M_\lambda = 1$

Insbesondere ist M $\mathfrak{n}^+$-lokal finit, also in $\mathcal{O}$.

Folglich $N \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \exists M_1, \dots, M_n$ Höchstgewichtsmoduln und s.e.s. $\bigoplus M_i \to N \to 0$.

(4) Jeder Quotient $\neq 0$ von M ist ein Höchstgewichtsmodul zum Gewicht λ.

(5) Jeder Untermodul von M ist ein Gewichtsmodul. Ist $N = \mathcal{U}(\mathfrak{g})w$, $w \in M_\mu$ maximaler Vektor mit $\mu < \lambda$, so ist $N \neq M$. Insbesondere:

M einfach $\Rightarrow$ alle maximalen Vektoren sind ein Vielfaches von v.

(6) M hat einen eind. einfachen Quotienten & einen eindeutigen max. Untermodul $\neq M$

$\Rightarrow$ M ist unzerlegbar.

(7) Es gibt bis auf Isomorphie genau einen einfachen Höchstgewichtsmodul zum Gewicht λ. Ist M einfach, so ist $\mathrm{End}_{\mathcal{O}} M = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}_M$.

<u>Beweis</u>: (1) PBW. (2), (3) folgen.

(4) ist trivial (5) $M \in \mathcal{O} \Rightarrow$ alle Untermoduln ~~Bew~~ sind in $\mathcal{O}$, Beh folgt aus (3).

(6) Ist $N \subsetneq M$ Untermodul, so

ist N Gewichtsmodul, aber $N_\lambda = 0$,

da $\dim M_\lambda = 1$ und $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) M_\lambda$.

Daher ist $\underbrace{\sum \{\text{echte Untermoduln}\}}_{\text{größter Untermodul}} \subsetneq M$.

⇒ eind. max. Untermodul

⇒ eind. einf. Quotient

(7) M_1, M_2 HGM, einfach, von Gewicht λ.

v_1 v_2 max Vektor vom Gew λ.

$N:= M_1 \oplus M_2 \supseteq N := \mathcal{U}(\mathfrak{g}).v$, $v := (v_1, v_2) \Rightarrow N$ HGM vom Gew. λ

$M_1 \twoheadleftarrow N \twoheadrightarrow M_2$

(6) ⇒ $M_1 \cong M_2$.

$\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} M \Rightarrow \varphi$ Iso, $\varphi(v) = cv$

Aber dann $\varphi(uv) = u\varphi(v) = cuv$.

⇒ $\varphi = c\,\mathrm{id}_M$. □

25.10.2013